Máquina de Turing e o Problema da Parada

#08

Enumerabilidade das MT's

Enumerabilidade das Máquinas de Turing

O conjunto de todas as máquinas de Turing é um conjunto enumerável.

De fato, toda MT possui um número finito de estados e um alfabeto finito.

Lembre-se de que uma instrução para uma MT é uma quádrupla da forma (q_i, s_j, α, q_l) , em que $\alpha \in \Sigma \cup \{E, D\}$.

Logo, dados Q e Σ, temos um número também finito de instruções (consequentemente, um número finito de MT's).

Enumerabilidade das Máquinas de Turing

Fixando $\Sigma = \{0, 1\}$, o conjunto de todas as máquinas de Turing pode ser dado pela união enumerável de MT' de 1 estado, de 2 estados, de 3 estados, e assim por diante.

Como a união enumerável de conjuntos finitos é enumerável, então o conjunto de todas as MT's e enumerável.

Numeração de Gödel para MT's

É possível que, para cada MT, associemos a ela um número identificador único, chamado de *número de Gödel*.

Assim, MT's podem receber como entrada em sua fita um número que representa uma MT.

Isso será importante em questões futuras. Vejamos como fazer isso.

Numeração de Gödel para MT's

Consideremos uma máquina de Turing $M = (Q, \Sigma, I, q_1, q_f)$. Vamos tomar, a critério de fixação, a MT do exemplo 1 do episódio 3, cujas instruções eram:

- $i_1 = (q_1, 1, D, q_1)$
- $i_2 = (q_1, 0, 1, q_2)$
- $i_3 = (q_2, 1, E, q_2)$
- $i_4 = (q_2, 0, D, q_3)$

$Q = \{q_1, q_2, q_3\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$q_f = q_3$

Numeração de Gödel para MT's

Consideremos ainda que para cada $q_i \in Q - \{q_f\}$ e para cada $s_j \in \Sigma$, exista uma instrução da forma $(q_i, s_j, \alpha, \beta)$.
Se não houver, acrescentamos uma instrução ao conjunto I que mantém o símbolo da fita e vai para o estado final q_f.

Agora, associamos um número a cada símbolo de $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ e a cada símbolo de $\Sigma = \{0, 1\} \cup \{E, D\}$ da seguinte forma:

- Se o símbolo for q_i, associamos a ele o número i;
- Se o símbolo for $0, 1, E, D$, associamos a eles, respectivamente, os números 1, 2, 3, 4.

Numeração de Gödel para MT's

Agora, se colocarmos as instruções em ordem lexicográfica, teremos (tomando nosso exemplo inicial), p. ex.

$$(q_1, 0, 1, q_2), (q_1, 1, D, q_1), (q_2, 0, D, q_3), (q_2, 1, E, q_2)$$

veremos que os dois primeiros símbolos das instruções são agora previsíveis. Portanto, podemos eliminá-los e ficar apenas com

$$(1, q_2), (D, q_1), (D, q_3), (E, q_2)$$

Numeração de Gödel para MT's

$$(1, q_2), (D, q_1), (D, q_3), (E, q_2)$$

Trocando cada símbolo pelo número associado anteriormente, ficamos com a sequência

$$2, 2, 4, 1, 4, 3, 3, 2$$

Símbolo	Número associado
q_i	i
0	1
1	2
E	3
D	4

Numeração de Gödel para MT's

O número de Gödel dessa MT será o número associado à sequência

$$2, 2, 4, 1, 4, 3, 3, 2$$

dado por

$\prod_{i=1}^{k} p_i^{x_i}$, em que

$$g(M) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

- k é o nº de termos da sequência
- p_i é o *i*-ésimo nº primo
- x_i é o *i*-ésimo termo da sequência

Numeração de Gödel para MT's

O número de Gödel dessa MT será o número associado à sequência

$$2, 2, 4, 1, 4, 3, 3, 2$$

dado por

$\prod_{i=1}^{k} p_i^{x_i}$, em que

$$g(M) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^1 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^3 \cdot 19^2$$

- k é o nº de termos da sequência
- p_i é o *i*-ésimo nº primo
- x_i é o *i*-ésimo termo da sequência

Pelo teorema fundamental da aritmética, este número é o único que representa tal máquina.

Numeração de Gödel para MT's

Nem todo número representa uma MT, mas dado um número, podemos fazer o processo inverso.

Por exemplo, tomemos o número 420.
Sua decomposição em fatores primos é $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$.

Os expoentes formam a sequência $2, 1, 1, 1$.

Sabemos que cada dois números representam os dois símbolos finais de uma instrução do tipo (q_i, s_j, α, q_l), com $\alpha = \{0, 1\} \cup \{E, D\}$.

Numeração de Gödel para MT's

Sabemos que cada dois números representam os dois símbolos finais de uma instrução do tipo (q_i, s_j, α, q_l), com $\alpha \in \{0, 1\} \cup \{E, D\}$.

Vamos organizar de dois em dois números
$(2, 1), (1, 1)$.

O primeiro é α e o segundo é um estado.
Observando nossa tabela, temos

$(1, q_1), (0, q_1)$.

	Símbolo	Número associado
	q_i	i
α	0	1
α	1	2
α	E	3
α	D	4

Numeração de Gödel para MT's

Observando nossa tabela, temos

$$(1, q_1), (0, q_1).$$

Tudo o que temos que fazer agora é completar as instruções com as partes previsíveis

$$(q_1, 0, 1, q_1), (q_1, 1, 0, q_1).$$

Estas instruções correspondem a uma MT que entra em loop.

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br